PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2013	CONVOCATORIA: JULIO 2013
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Comproveu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat,** que:

a) Si el producte de dues matrius quadrades A i B és commutatiu, és a dir, que $AB = BA$, llavors es dedueix que $A^2B^2 = (AB)^2$. (2 *punts*).

b) Que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisfà la relació $A^2 - 3\text{A} + 2\text{I} = O$, sent I i O, respectivament, les matrius d'ordre 3×3 unitat i nul·la, (4 *punts*), i que una matriu A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ té matriu inversa. (2 *punts*)

c) Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**, els valors α i β que fan que $A^3 = \alpha A + \beta I$, sabent que la matriu A verifica la igualtat $A^2 - 3A + 2I = O$. (2 *punts*).

Solució: a) La identitat se segueix de $A^2 B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)^2$. b) Les files de A^2 són (1,0,0), (0, –14, 30), (0, –9, 19); les files de $3A$ són (3, 0, 0), (0, –12, 30), (0, –9, 21). Llavors $A^2–3A+2I=O$; A és invertible perquè $A(A–3I)= –2I$, per tant, hi ha una matriu el producte de la qual per A és la matriu unitat. c) De $A^3 = 3A^2 – 2A = 7A – 6I$, es dedueix que α = 7, β = –6.

Problema A.2. Tenim les rectes $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ *i* $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, sent α i β paràmetres reals.

Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Unes equacions implícites de r_1. (2 *punts*).

b) La justificació que les rectes r_1 y r_2 estan contingudes en un plànol π, (2 *punts*), i l'equació d'aquest plànol π. (2 *punts*).

c) L'àrea del triangle de vèrtexs P, Q *i* R, sent $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ i R el punt d'intersecció de r_1 y r_2. (4 punts).

Solució: a) Unes equacions implícites de r_1 són: $x = 1 + 2y$, $z = 2 – y$. b) Les rectes es tallen en el punt R = (–1, –1, 3) i l'equació del plànol que les conté és –x + 4y + 2z – 3 = 0. c) El producte vectorial dels vectors RP i RQ és (3, –2, –1) i l'àrea demanada és la meitat del mòdul, això és, $(1/2)14^{1/2}$ = 1.8708…

Problema A.3. Es donen les funcions $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ i $g(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Determineu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Les derivades de $f(x)$ i $g(x)$. (4 *punts*).

b) Els dominis de definició de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. (3 *punts*).

c) L'expressió simplificada de la funció $f(x)+g(x)$, (1,5 *punts*), i el recorregut d'aquesta funció $f(x)+g(x)$. (1,5 *punts*).

Solució: a) $f'(x) = 1/(1-x^2)$ i $g'(x) = -1/(1-x^2)$. b) Les dues funcions tenen el mateix domini, (–1, 1). c) La funció *f* + *g* és constant igual a zero, usant propietats del logaritme o aplicant el resultat de l'apartat (a), per tant, el seu recorregut és $\{0\}$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$ on α és un paràmetre real.

Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Totes les solucions del sistema quan $\alpha = 7$. (4 *punts*).

b) Els valors de α per als quals el sistema és compatible indeterminat. (3 *punts*).

c) Els valors de α per als quals el sistema és compatible determinat. (3 *punts*).

Solució: a) (λ, λ,1–8 λ), sent λ un nombre real. b) α = 1 i α = 7. c) Qualsevol nombre real α diferent dels de l'apartat (b).

Problema B.2. Es donen les rectes $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ i $s:\{x-1=y-2=z$. Determineu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Un punt i un vector director de cadascuna de les dues rectes. (3 *punts*).

b) La distància entre les rectes r i s, (2 *punts*), **justificant** que les rectes r i s es creuen. (2 *punts*).

c) Unes equacions de la recta t que passa pel punt $\left(\dfrac{41}{57},\ -\dfrac{14}{57},\ 0\right)$ i és perpendicular a les rectes r i s. (3 *punts*).

Solució: a) La recta *r* està definida pel punt *P*=(0, ½, ½) i el vector *u* = (–2, 1, 3). La recta *s* està definida pel punt *Q*=(1, 2, 0) i el vector *v* = (1,1,1). b) El plànol que conté *s* i és paral·lel a *r* és: 2*x* – 5*y* + 3*z* + 8 = 0. La distància demanada coincideix amb la distància del punt *P* a aquest plànol, per la qual cosa d(*r,s*) = $7/\sqrt{38}=1{,}1355...$; per tant, les rectes no són coincidents i en no ser paral·leles es creuen. c) $v\wedge u=(2,-5,\ 3)$, $t:\dfrac{x-41/57}{2}=\dfrac{y+14/57}{-5}=\dfrac{z}{3}$. No és necessari calcular $t\cap r=\left\{\left(\dfrac{10}{19},\dfrac{9}{38},-\dfrac{11}{38}\right)\right\}$ i $t\cap s=\left\{\left(\dfrac{3}{19},\dfrac{22}{19},-\dfrac{16}{19}\right)\right\}$, si bé amb aquests dos punts es pot determinar que la seua distància $7/\sqrt{38}=1{,}1355...$) resol part de b).

Problema B.3. En el plànol *XY* està dibuixada una parcel·la A els límits de la qual són dos carrers d'equacions $x=0$ i $x=40$, respectivament, una carretera d'equació $y=0$, i el tram del curs d'un riu, d'equació

$y=f(x)=30\sqrt{2x+1}$, amb $0\le x\le 40$, sent positiu el signe de l'arrel quadrada.

Es pretén urbanitzar un rectangle R inscrit en la parcel·la A, de manera que els vèrtexs de R siguen els punts $(x,0)$, $(x,f(x))$, $(40,f(x))$ i $(40,0)$.

Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'àrea de la parcel·la A. (3 *punts*).
b) Els vèrtexs del rectangle R al qual correspon l'àrea màxima. (5 *punts*).
c) El valor d'aquesta àrea màxima. (2 *punts*).

Solució: a) L'àrea de la parcel·la s'obté integrant $f(x)$ entre 0 i 40. S'obté àrea = 7280 unitats d'àrea.
b) L'àrea del rectangle de vèrtexs $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$, $(40,0)$ ve donada per $g(x) = (40-x)f(x)$. La derivada de g només s'anul·la quan $x = 13$, sent positiva si $x < 13$ i negativa si $x > 13$ ($g(0) = 1200$, $g(13) = 2430\sqrt{3}$ i $g(40) = 0$). Per tant, el rectangle de major àrea s'obté quan $x = 13$. Llavors, els seus vèrtexs són $(13, 0)$, $(13, 90\sqrt{3})$, $(40, 90\sqrt{3})$ i $(40, 0)$. c) $2430\sqrt{3} = 4208{,}88...$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Comprobar **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado** que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $AB = BA$, entonces se deduce que $A^2B^2 = (AB)^2$. (2 *puntos*).

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula, (4 *puntos*), y que una matriz A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ tiene matriz inversa. (2 *puntos*)

c) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = O$. (2 *puntos*).

Solución: a) La identidad se sigue de $A^2 B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)^2$. b) Las filas de A^2 son (1,0,0), (0, –14, 30), (0, –9, 19); las filas de 3 A son (3, 0, 0), (0, –12, 30), (0, –9, 21). Entonces $A^2-3A+2I=O$; A es invertible porque $A(A-3I)= -2I$, luego existe una matriz cuyo producto por A es la matriz unidad. c) De $A^3 = 3A^2 - 2A = 7A - 6I$, se deduce que $\alpha = 7$, $\beta = -6$.

Problema A.2. Se dan las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Unas ecuaciones implícitas de r_1. (2 *puntos*).

b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π, (*2 puntos*) y la ecuación de ese plano π. (2 *puntos*).

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R, siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2. (4 puntos).

Solución: a) Unas ecuaciones implícitas de r_1 son: $x = 1 + 2y$, $z = 2 - y$. b) Las rectas se cortan en el punto $R = (-1, -1, 3)$ y la ecuación del plano que las contiene es $-x + 4y + 2z - 3 = 0$. c) El producto vectorial de los vectores *RP* y *RQ* es (3, –2, –1) y el área pedida es la mitad del módulo, esto es, $(1/2)14^{1/2} = 1.8708…$

Problema A.3. Se dan las funciones $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$. (4 *puntos*).

b) Los dominios de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (3 *puntos*).

c) La expresión simplificada de la función $f(x) + g(x)$, (1,5 *puntos*), y el recorrido de esta función $f(x) + g(x)$. (1,5 *puntos*).

Solución: a) $f'(x) = 1/(1-x^2)$ y $g'(x) = -1/(1-x^2)$. b) Las dos funciones tienen el mismo dominio, (–1, 1). c) La función $f + g$ es constante igual a cero, usando propiedades del logaritmo o aplicando el resultado del apartado (a), luego su recorrido es $\{0\}$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. (4 *puntos*).
b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 *puntos*).
c) Los valores de α para los cuales el sistema es compatible determinado. (3 *puntos*).

Solución: a) $(\lambda, \lambda, 1-8\lambda)$, siendo λ un número real. b) $\alpha = 1$ y $\alpha = 7$. c) Cualquier número real α distinto de los del apartado (b).

Problema B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s: \{x - 1 = y - 2 = z$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 *puntos*).
b) La distancia entre las rectas r y s (2 *puntos*), **justificando** que las rectas r y s se cruzan. (2 *puntos*).
c) Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s. (3 *puntos*).

Solución: a) La recta r está definida por el punto P=(0, ½, ½) y el vector u = (–2, 1, 3). La recta s está definida por el punto Q=(1, 2, 0) y el vector v = (1,1,1). b) El plano que contiene a s y es paralelo a r es: $2x - 5y + 3z + 8 = 0$. La distancia pedida coincide con la distancia del punto P a este plano, por lo que $d(r, s) = 7/\sqrt{38} = 1{,}1355...$; luego las rectas no son coincidentes y al no ser paralelas se cruzan. c) $v \wedge u = (2, -5, 3)$, $t: \frac{x - 41/57}{2} = \frac{y + 14/57}{-5} = \frac{z}{3}$. No es necesario obtener $t \cap r = \left\{\left(\frac{10}{19}, \frac{9}{38}, -\frac{11}{38}\right)\right\}$ y $t \cap s = \left\{\left(\frac{3}{19}, \frac{22}{19}, -\frac{16}{19}\right)\right\}$, si bien con estos dos puntos se puede obtener que su distancia $7/\sqrt{38} = 1{,}1355...$) resuelve parte de b).

Problema B.3. En el plano XY está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, con $0 \le x \le 40$, siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.

Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A, de manera que los vértices de R sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la parcela A. (3 *puntos*).
b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. (5 *puntos*).
c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*).

Solución: a) El área de la parcela se obtiene integrando $f(x)$ entre 0 y 40. Resulta área = 7280 unidades de área. b) El área del rectángulo de vértices $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$, $(40,0)$ viene dada por $g(x) = (40-x)f(x)$. La derivada de g solo se anula cuando $x = 13$, siendo positiva si $x < 13$ y negativa si $x > 13$ ($g(0) = 1200$, $g(13) = 2430\sqrt{3}$ y $g(40) = 0$). Por tanto, el rectángulo de mayor área se obtiene cuando $x = 13$. Entonces sus vértices son $(13, 0)$, $(13, 90\sqrt{3})$, $(40, 90\sqrt{3})$ y $(40, 0)$. c) $2430\sqrt{3} = 4208{,}88...$