PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2011	CONVOCATORIA: JUNIO 2011
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Siga el sistema d'equacions $S:\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases}$, on m és un paràmetre real. Obtingueu **raonadament**:

a) Totes les solucions del sistema S quan $m=2$. (*4 punts*).

b) Tots els valors de m per als quals el sistema S té una solució única. (*2 punts*).

c) El valor de m per al qual el sistema S admet la solució $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. (*4 punts*).

Solució:
a) Las dues últimes equacions ens donen directament y = (1-x)/3, z = (5-2x)/3 i en substituir en l'equació primera s'obté 0=0. Les solucions són (x=λ; y = (1-λ)/3; z=(5-2λ)/3), amb λ en **R**. La solució és més simple substituint λ=1+3μ.
b) m un nombre real distint de 2, perquè el determinant dels coeficients de les incògnites només s'anul·la en un valor de m, que per a) és 2.
c) En substituir resulta m=1.

Problema A.2. En l'espai es donen les rectes $r:\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ i $s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$. Obtingueu **raonadament**:

a) Un punt i un vector director de cada recta. (*3 punts*).
b) La posició relativa de les rectes r i s. (*4 punts*).
c) L'equació del pla que conté a r i és paral·lel a s. (*3 punts*).

Solució:
a) (0,2,2) i (0,-3,1); v_r = (1,1,-1) i v_s = (1,2,-1).
b) No són paral·leles. Els tres primers plans es tallen en (5, 7, -3), que no pertany al quart pla. Per tant, s'encreuen.
c) Un vector perpendicular al pla és (prod. vectorial) (1,0,1), per tant x + z - 2=0 és el pla.

Problema A.3. Siga f la funció definida per $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$. Obtingueu **raonadament**:

a) El domini i les asímptotes de la funció $f(x)$. (3 *punts*).

b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$. (4 *punts*).

c) La integral $\int f(x)dx=\int\dfrac{x}{x^2-3x+2}dx$. (3 *punts*).

Solució: a) El denominador s'anul·la en {1,2}. El domini és **R**- {1,2}. Dues asímptotes verticals són x=1 i x=2, per ser infinit el límit de la funció en aqueixos dos punts. Té l'asímptota horitzontal y=0, perquè 0 és el límit de la funció quan x tendeix a infinit.
b) $f'(x)=(2-x^2)(x^2-3x+2)^{-2}$ és positiva en els intervals $]-2^{1/2},1[$ i $]1,2^{1/2}[$, i és negativa en els altres punts de **R**- {1,2}.
c) $f(x)=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$, per la qual cosa la integral és $2\ln|x-2|-\ln|x-1|$. No es penalitzarà que no es pose el valor absolut.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dóna la matriu $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$, on m és un paràmetre real.

a) Obtingueu **raonadament** el rang o característica de la matriu A en funció dels valors de m. (*5 punts*).
b) **Expliqueu** per què és invertible la matriu A quan $m=1$. (*2 punts*).
c) Obtingueu **raonadament** la matriu inversa A^{-1} de A quan $m=1$, i indiqueu els distints passos per a l'obtenció de A^{-1}. **Comproveu** que els productes AA^{-1} i $A^{-1}A$ donen la matriu unitat. (*3 punts*).

Solució:
a) El determinant de la matriu és $-m\,(m^2+1)$ que només és 0 si m=0. Si m=0 el rang és 2 i si m no és 0 el rang és 3.
b) Per ser 3 el seu rang.
c) Per adjunts o mètode del pivot o … $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. El producte AA^{-1} és la matriu unitat.

Problema B.2. En l'espai es donen les rectes $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases}$ i $s: x-1=y=z-3$. Obtingueu **raonadament**:

a) Un vector director de cada una de dites rectes r i s. (*2 punts*).
b) L'equació del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt $(0,1,3)$. (*3 punts*).
c) El punt d'intersecció de les rectes r i s (*2 punts*) i l'equació del pla π que conté aquestes rectes r i s. (*3 punts*).

Solució:
a) (1,-1,0) i (1,1,1)
b) 1(x-0)-1(y-1)=0
c) L'equació de *r* indica que z=3, per la qual cosa l'equació de *s* ens dirà que x=1 i y=0. El punt d'intersecció és el (1,0,3) ja que compleix les dues primeres equacions de r per a $\lambda=1$. El producte vectorial dels dos vectors directors és (1, 1, -2), per tant l'equació del pla π és x-1+y-2(z-3)=0.

Problema B.3. Es desitja construir un camp rectangular amb vèrtexs *A*, *B*, *C* i *D* de manera que:
Els vèrtexs A i B siguen punts de l'arc de la paràbola $y=4-x^2$, $-2\le x\le 2$, i el segment d'extrems *A* i *B* és horitzontal.
Els vèrtexs C i D siguen punts de l'arc de la paràbola $y=x^2-16$, $-4\le x\le 4$, i el segment d'extrems *C* i *D* és també horitzontal.
Els punts *A* i *C* han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real positiu x.
Els punts *B* i *D* han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real negatiu $-x$.
Es demana obtindre **raonadament**:
a) L'expressió $S(x)$ de l'àrea del camp rectangular en funció del nombre real positiu x. (*4 punts*).
b) El nombre real positiu x per al qual l'àrea $S(x)$ és màxima. (*4 punts*).
c) El valor de l'àrea màxima. (*2 punts*).

Solució:
a) La distància entre *A* i *C* és $4-x^2-(x^2-6)$ per la qual cosa $S(x)=2x(20-x^2)$, on x varie de 0 a 2.
b) $S'(x) = 4(10-x^2)$, per la qual cosa (en [0,2]) $S(x)$ és creixent de 0 a $(10/3)^{1/2}$ i decreixent de $(10/3)^{1/2}$ a 2.
c) $S(x=(10/3)^{1/2})= \frac{80}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} = 48{,}68644956...$

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se li prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m+1 \\ x + 3y + (m-2)z = m-1 \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema S cuando $m = 2$ (*4 puntos*).
b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. (*2 puntos*).
c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. (*4 puntos*).

Solución:
a) Las dos últimas ecuaciones nos dan directamente y = (1-x)/3, z = (5-2x)/3 y al sustituir en la ecuación primera se obtiene 0=0. Las soluciones son (x=λ; y = (1-λ)/3; z=(5-2λ)/3), con λ en **R**. La solución es más simple sustituyendo λ=1+3μ.
b) m es un número real distinto de 2, pues el determinante de los coef. de las incog. sólo se anula en un valor de m, que por a) es 2.
c) Al sustituir resulta m=1.

Problema A.2. En el espacio se dan las rectas $r:\begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$. Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. (*3 puntos*).
b) La posición relativa de las rectas r y s. (*4 puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (*3 puntos*).

Solución:
a) (0,2,2) y (0,-3,1); v_r = (1,1,-1) y v_s = (1,2,-1).
b) No son paralelas. Los tres primeros planos se cortan en (5, 7, -3), que no pertenece al cuarto plano. Luego se cruzan.
c) Un vector perpendicular al plano es (producto vectorial) (1,0,1), luego x+z-2=0 es el plano.

Problema A.3. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$. Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (3 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (4 *puntos*).
c) La integral $\int f(x)dx=\int \dfrac{x}{x^2-3x+2}dx$. (3 *puntos*).

Solución:
a) El denominador se anula en {1,2}. El dominio es R- {1,2}. Dos asíntotas verticales son x=1 y x=2, por ser infinito el límite de la función en esos dos puntos. Tiene la asíntota horizontal y=0, pues 0 es el límite de la función cuando x tiende a infinito.
b) $f'(x)=\left(2-x^2\right)\left(x^2-3x+2\right)^{-2}$ es positiva en los intervalos $]-2^{1/2},1[$ y $]1, 2^{1/2}[$, siendo negativa en los demás puntos de **R**- {1,2}.
c) $f(x)=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$, por lo que la integral es $2\ln|x-2|-\ln|x-1|$. No se penalizará que no se utilice el valor absoluto.

OPCIÓN B

Problema B.1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real.

a) Obtener **razonadamente** el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. (*5 puntos*).
b) **Explicar** por qué es invertible la matriz A cuando $m=1$. (*2 puntos*).
c) Obtener **razonadamente** la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m=1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. **Comprobar** que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. (*3 puntos*).

a) El determinante de la matriz es $-m\ (m^2+1)$ que sólo es 0 si m=0. Si m=0 el rango es 2 y si m no es 0 el rango es 3.
b) Por ser 3 su rango.

c) Por adjuntos o método del pivote o … $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. El producto AA^{-1} es la matriz unidad.

Problema B.2. En el espacio se dan las rectas $r: \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & 1-\lambda \\ z = & 3 \end{cases}$ y $s: \{\ x-1 = y = z-3.$ Se pide obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de cada una de dichas rectas r y s. (*2 puntos*).
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto (0,1,3). (*3 puntos*).
c) El punto de intersección de las rectas r y s (*2 puntos*) y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas r y s. (*3 puntos*).

Solución:
a) (1,-1,0) y (1,1,1)
b) 1(x-0)-1(y-1)=0
c) La ecuación de r indica que z=3, por lo que la ecuación de s nos dirá que x=1 e y=0. El punto de intersección es el (1,0,3) ya que cumple las dos primeras ecuaciones de r para λ=1. El producto vectorial de los dos vectores directores es (1, 1, -2), por lo que la ecuación del plano π es x-1+y-2(z-3)=0.

Problema B.3. Se desea construir un campo rectangular con vértices A, B, C y D de manera que:

Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2,\quad -2 \le x \le 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.

Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16,\quad -4 \le x \le 4$, y el segmento de extremos C y D es también horizontal.
Los puntos A y C deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo x.
Los puntos B y D deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.
Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x. (*4 puntos*).
b) El valor x para el que el área $S(x)$ es máxima. (*4 puntos*).
c) El valor del área máxima. (*2 puntos*).

Solución:
a) La distancia entre A y C es $4-x^2-(x^2-6)$ por lo que $S(x)=2x(20-x^2)$, donde x varia de 0 a 2.
b) $S'(x) = 4(10-x^2)$, por lo que (en [0,2]) $S(x)$ es creciente de 0 a $(10/3)^{1/2}$ y decreciente de $(10/3)^{1/2}$ a 2.
c) $S(x=(10/3)^{1/2}) = \frac{80}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} = 48{,}68644956...$