PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2016	CONVOCATORIA: JUNIO 2016
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} ax - z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és incompatible. (4 *punts*)
b) Totes les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat. (3 *punts*)
c) La solució del sistema quan $a = -1$. (3 *punts*)

Solució. a) El determinant de la matriu de coeficients val $a(a+2)$. El sistema és incompatible quan $a = 0$.
b) El sistema és compatible indeterminat quan $a = -2$. En aquest cas, la solució del sistema és $(\alpha, 2^{-1}, 2-2\alpha)$. c) Quan $a = -1$, la solució del sistema és $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

Problema A.2. Es donen les rectes $r: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha - 2 \end{cases}$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La recta paral·lela a r que passa pel punt $(0,1,0)$. (3 *punts*)
b) El pla π que conté la recta r i és paral·lel a s. (3 *punts*)
c) La distància entre les rectes r i s. (4 *punts*)

Solució. a) $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 4, 7)$. b) $\pi: 10x + y - 2z + 6 = 0$. c) Un punt de la recta s és $P(1, 0, -2)$. Llavors $d(r,s) = d(P,\pi) = 20/\sqrt{105}$.

Problema A.3. Es dóna la funció *f* definida per $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Domini i asímptotes de la funció *f*. (2 *punts*)

b) Intervals de creixement i de decreixement de la funció *f*. (3 *punts*)

c) La integral $\int f(x)\,dx$. (3 *punts*)

d) El valor $a>4$ per al qual l'àrea de la superfície limitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $y=0,\quad x=4\quad i\quad x=a$ és $\ln(3/2)$. (2 *punts*)

Solució. a) El domini és $(-\infty,\,2)\cup(2,\,3)\cup(3,\,+\infty)$. Les asímptotes verticals són $x=2$ i $x=3$. L'asímptota horitzontal és $y=0$. b) La funció creix en $(-\infty,\,2)\cup(2,\,5/2)$ i decreix en $(5/2,\,3)\cup(3,\,\infty)$. c) Les primitives són $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. d) De $\ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right|-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{3}{2}$, es dedueix la solució $a=6$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dóna la matriu $A=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La comprovació que $A^{-1}=5^{-1}A^t$, sent A^t la matriu transposada de A. (4 *punts*)

b) Els valors del paràmetre real λ per als quals $A-\lambda I$ no és invertible, sent I la matriu identitat d'ordre 3. (3 *punts*)

c) El determinant d'una matriu quadrada B el determinant de la qual és major que 0 i verifica l'equació $B^{-1}=B^t$. (3 *punts*)

Solució. a) N'hi ha prou amb comprovar que en multiplicar A per A^t s'obté $5I$. b) La matriu $A-\lambda I$ no és invertible quan té determinant nul, és a dir, quan $\lambda=\sqrt{5}$. c) De $B^{-1}=B^t$ i $\det(B)>0$ es dedueix que $\det(B)=1$.

Problema B.2 Es dóna el pla $\pi:6x+3y+2z-12=0$ i els punts $A(1,0,0),\ B(0,2,0)\quad i\quad C(0,0,3)$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'equació implícita del pla σ que passa pels punts $A,\ B\ i\ C$, (2 *punts*)
i la posició relativa dels plans σ i π. (2 *punts*)

b) L'àrea del triangle de vèrtexs $A,\ B\ i\ C$. (3 *punts*)

c) Un punt P del pla π i el volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C. (3 *punts*)

Solució. a) $\sigma:6x+3y+2z-6=0$. Els dos plans són paral·lels. b) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(6,3,2)$ i l'àrea del triangle és $7/2$. c) Per exemple, $P=(0,0,6)$. De $d(P,\sigma)=6/7$, es dedueix que $(1/3)\cdot(7/2)\cdot(6/7)=1$ és el volum demanat.

Problema B.3. Cada dia, una planta productora d'acer ven x tones d'acer de qualitat baixa i y tones d'acer de qualitat alta. Per restriccions del sistema de producció, ha de succeir que $y=\frac{23-5x}{10-x}$, en què $0<x<\frac{23}{5}$.

El preu d'una tona d'acer de qualitat alta és de 900 euros, i el preu d'una tona d'acer de qualitat baixa és de 300 euros.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els ingressos obtinguts en un dia en funció de x. (3 *punts*)

b) Quantes tones de cada tipus d'acer s'han de vendre en un dia perquè els ingressos obtinguts aquest dia siguen màxims. (5 *punts*)

c) L'ingrés màxim que es pot obtenir per les vendes d'acer en un dia. (2 *punts*)

Solució. a) $f(x)=900\left(\frac{x}{3}+\frac{23-5x}{10-x}\right)$. b) Com que $f'(x)=900\left(\frac{1}{3}-\frac{27}{(10-x)^2}\right)=\frac{900}{3(10-x)^2}\left((10-x)^2-9^2\right)$, es dedueix que l'ingrés màxim s'obté quan $x=1$, per al qual es pot estudiar el signe de $f'(x)$ o qualsevol altre mètode. Llavors $y=2$. c) L'ingrés màxim obtingut és $f(1)=2100$ euros.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax - z = a \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

c) La solución del sistema cuando $a=-1$. (3 *puntos*)

Solución. a) El determinante de la matriz de coeficientes vale $a(a+2)$. El sistema es incompatible cuando $a=0$. b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a=-2$. En este caso, la solución del sistema es $(\alpha, 2^{-1}, 2-2\alpha)$. c) Cuando $a=-1$, la solución del sistema es $(x,y,z)=(1,1,0)$.

Problema A.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=1 \\ y=2\alpha \\ z=\alpha-2 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta paralela a r que pasa por el punto $(0,1,0)$. (3 *puntos*)

b) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s. (3 *puntos*)

c) La distancia entre las rectas r y s. (4 *puntos*)

Solución. a) $(x,y,z)=(0,1,0)+\lambda(1,4,7)$. b) $\pi: 10x+y-2z+6=0$. c) Un punto de la recta s es $P(1,0,-2)$. Entonces $d(r,s)=d(P,\pi)=20/\sqrt{105}$.

Problema A.3. Se da la función *f* definida por $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dominio y asíntotas de la función *f*. (2 *puntos*)

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*. (3 *puntos*)

c) La integral $\int f(x)\,dx$. (3 *puntos*)

d) El valor de $a>4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=4$ y $x=a$ es $\ln(3/2)$. (2 *puntos*)

Solución. a) El dominio es $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$. Las asíntotas verticales son $x=2$ y $x=3$. La asíntota horizontal es $y=0$. b) La función crece en $(-\infty, 2)\cup(2, 5/2)$ y decrece en $(5/2, 3)\cup(3, \infty)$. c) Las primitivas son $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. d) De $\ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right|-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{3}{2}$ se deduce la solución $a=6$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (4 *puntos*)

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 *puntos*)

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. (3 *puntos*)

Solución. a) Basta comprobar que al multiplicar A por A^t se obtiene $5I$. b) La matriz $A - \lambda I$ no es invertible cuando tiene determinante nulo, es decir, cuando $\lambda = \sqrt{5}$. c) De $B^{-1} = B^t$ y $\det(B) > 0$ se deduce que $\det(B) = 1$.

Problema B.2. Se da el plano $\pi : 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ y los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos A, B y C, (2 *puntos*) y la posición relativa de los planos σ y π. (2 *puntos*)

b) El área del triángulo de vértices A, B y C. (3 *puntos*)

c) Un punto P del plano π y el volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Solución. a) $\sigma : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Los dos planos son paralelos. b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,3,2)$ y el área del triángulo es $7/2$. c) Por ejemplo $P = (0,0,6)$. De $d(P,\sigma) = 6/7$ se deduce que $(1/3)\cdot(7/2)\cdot(6/7) = 1$ es el volumen pedido.

Problema B.3. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y = \frac{23-5x}{10-x}$, siendo $0 < x < \frac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x. (3 *puntos*)

b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. (5 *puntos*)

d) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. (2 *puntos*)

Solución. a) $f(x) = 900\left(\frac{x}{3} + \frac{23-5x}{10-x}\right)$. b) Puesto que $f'(x) = 900\left(\frac{1}{3} - \frac{27}{(10-x)^2}\right) = \frac{900}{3(10-x)^2}\left((10-x)^2 - 9^2\right)$ se deduce que el ingreso máximo se obtiene cuando $x = 1$, para lo que se puede estudiar el signo de $f'(x)$ o cualquier otro método. Entonces $y = 2$. c) El ingreso máximo obtenido es $f(1) = 2100$ euros.