COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$. (2 + 2 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$. (3 *punts*)

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *punts*)

Solució. a) El determinant de A val $2(a+1)^2$. Per tant, el rang val 3 quan $a \neq -1$, i 2 quan $a = -1$. Quan $a = 1$, tenim $|2A^{-1}| = 1$. b) $x = t, y = -\frac{1}{2} - 2t, z = t + 1$. c) B és invertible perquè $B(3B + 6I) = I$, per tant $m = 3$ i $n = 6$.

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes $r\colon \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ i $s\colon x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s. (3 *punts*)

b) La recta que passa per $P = (0, -1, 2)$ i talla perpendicularment la recta r. (4 *punts*)

c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla $\pi:\ x - 2y + az = b$. (3 *punts*)

Solució. a) $7x + y - 4z + 9 = 0$. b) $x = \frac{y+1}{-3} = z - 2$. c) $a = \frac{1}{2},\ b = 3$.

Problema A.3. Es considera la funció $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, així com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$. (3 *punts*)

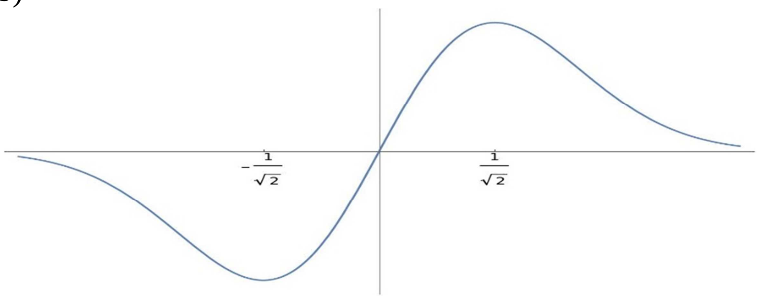
b) La representació gràfica de la corba $y = f(x)$. (2 *punts*)

c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punt*)

d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *punts*)

Solució. a) Asímptota horitzontal $y = 0$. La funció creix en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, decreix en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ i en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Hi ha un mínim relatiu en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i un màxim relatiu en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b)



c) La condició $g(0) = g(1)$ implica $a = -\frac{1}{e}$.

d) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$, $\int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + c$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible. (4 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible. (4 *punts*)

c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent. (2 *punts*)

Solució. a) És compatible si $\alpha = 14$ i és incompatible si $\alpha \neq 14$. b) $(11 + t, -7 - 2t, t), t \in \mathbb{R}$. c) Compatible i determinat.

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π. (4 *punts*)

b) Els punts *A*, *B* i *C*, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 *punts*)

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts *A*, *B* i *C* . (2 *punts*)

Solució. a) $9x + 12y + 20z = 80$ i $9x + 12y + 20z = 280$. b) (20, 0, 0), (0, 15, 0) i (0, 0, 9); l'angle és 43° 9' 8'' = 0,75315 radiants (el cosinus corresponent és 0,7295). c) 450 unitats de volum.

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia *f*(*t*) entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps *t* en hores des que van començar a desplaçar-se. (2 *punts*)

b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció *f* al llarg del trajecte. (4 *punts*)

c) Els valors de *t* per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima. (4 *punts*)

Solució. a) $f(t) = \sqrt{(250-40t)^2 + 900t^2}$. b) T = 25/4; decreixent en [0, 4[i creixent en]4, 25/4]. c) La distància màxima és 250 km amb t = 0; la distància mínima és 150 km i s'aconsegueix quan *t* =4 hores.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Solución. (a) El determinante de A vale $2(a+1)^2$. Por tanto el rango vale 3 cuando $a \neq -1$, y 2 cuando $a = -1$. Cuando $a = 1$ se tiene $|2A^{-1}| = 1$. (b) $x = t, y = -\frac{1}{2} - 2t, z = t + 1$. (c) B es invertible porque $B(3B + 6I) = I$, por tanto $m = 3$ y $n = 6$.

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Solución. (a) $7x + y - 4z + 9 = 0$. (b) $x = \frac{y+1}{-3} = z - 2$. (c) $a = \frac{1}{2},\ b = 3$

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

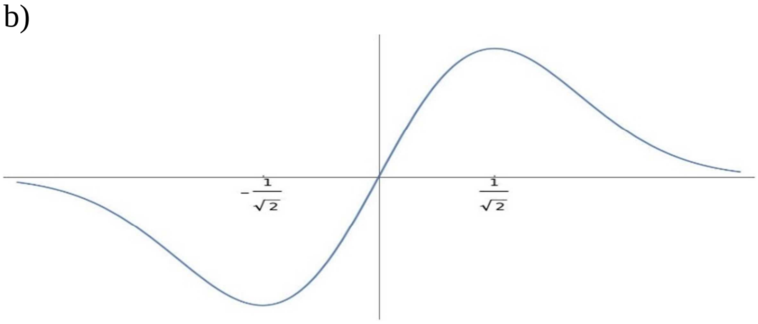
b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

Solución. (a) Asíntota horizontal $y = 0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. Hay un mínimo relativo en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y un máximo relativo en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b)



(c) La condición $g(0) = g(1)$ implica $a = -\frac{1}{e}$.

(d) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$, $\int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + c$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Solución. a) Es compatible si $\alpha = 14$ y es incompatible si $\alpha \neq 14$. b) $(11 + t, -7 - 2t, t), t \in \mathbb{R}$. c) Compatible y determinado.

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos *A*, *B* y *C* intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos *A*, *B* y *C*. (2 *puntos*)

Solución. a) $9x + 12y + 20z = 80$ y $9x + 12y + 20z = 280$. b) (20, 0, 0), (0, 15, 0) y (0, 0, 9); el ángulo es 43º 9’ 8’’ = 0,75315 radianes (su coseno es 0,7295). c) 450 unidades de volumen.

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia *f*(*t*) entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo *t* en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f* a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de *t* para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

Solución. a) $f(t) = \sqrt{(250 - 40t)^2 + 900t^2}$. b) T $= 25/4$; decreciente en [0, 4[y creciente en]4, 25/4]. c) La distancia máxima es 250 km con t = 0; la distancia mínima es 150 km y se alcanza cuando *t* =4 horas.